

PREISSCHRIFTEN
GEKRÖNT UND HERAUSGEGEBEN VON DER
FÜRSTLICH JABLONOWSKISCHEN GESELLSCHAFT
ZU LEIPZIG.



Nr. XVI DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN SEKTION.

XL. JOSEF PLEMELJ: POTENTIALTHEORETISCHE
UNTERSUCHUNGEN.



DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG 1911.

POTENTIALTHEORETISCHE
UNTERSUCHUNGEN.

VON

DR. JOSEF PLEMELJ,

O. Ö. PROFESSOR DER MATHEMATIK
AN DER UNIVERSITÄT IN CZERNOWITZ.



DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG 1911.

Vorwort.

„Die meisten Aufgaben der Elektrostatik sind reduzierbar auf die Ermittlung der Greenschen Massenbelegungen, und es sind daher diese Belegungen für die Theorie der Elektrostatik sowie überhaupt für die ganze Potentialtheorie von hervorragender Wichtigkeit. Durch neuerdings publizierte Untersuchungen (Ber. d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss., Math.-phys. Kl. 1906 S. 483—558) dürfte wohl nun außer Zweifel gesetzt sein, daß in der Theorie des logarithmischen Potentials für jedwede geschlossene Kurve die dem Innen- und Außenraum entsprechenden beiden Greenschen Belegungen reduzierbar sind auf eine einzige Belegung, auf die sogenannte ‚Grundbelegung‘, und daß Analoges auch gelte in der Theorie des Newtonschen Potentials für jedwede geschlossene Oberfläche. Immerhin lassen die in Rede stehenden Untersuchungen bis jetzt noch vieles zu wünschen übrig. Demgemäß stellt die Gesellschaft folgende Aufgabe:

Es soll eine Arbeit eingeliefert werden, durch welche jene Theorie der ‚Grundbelegung‘ in bezug auf Klarheit und Strenge oder in Bezug auf Umfang und Vollständigkeit wesentlich gefördert wird.“

Dies ist der Wortlaut der von der *Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft* für das Jahr 1910 gestellten Aufgabe.

Die vorliegende Schrift verfolgt als Hauptziel, eine Lösung der gestellten Frage zu geben. Es ist natürlich, daß bei Problemstellungen, die gewissermaßen den Schlußstein einer Theorie bilden, ausgedehnte Hilfsmittel zur Lösung herangezogen werden müssen. Dem Verfasser dieser Arbeit erschien es deshalb nötig, den ganzen Lehrgang der Potentialtheorie durchzugehen, um schon in den Fundamenten einige Ergänzungen hinzuzufügen, die gewissen Theoremen eine Allgemeinheit verschaffen, wodurch sie erst bei Behandlung so subtiler Fragen anwendbar werden. Wenn so meine Arbeit gleichsam den Charakter eines systematischen Aufbaues der Potentialtheorie erhalten hat, so wird man hoffentlich selbst in den Grundlagen der Potentialtheorie die Darstellung nicht als eine einfache Wiedergabe längst bekannter Darstellungsmethoden finden. Es mußte mir daran gelegen sein, nur das wirklich Nötige zu präzisieren und erforderlichenfalls zu ergänzen, hingegen alles nicht Nötige und deshalb Hemmende zu vermeiden. Um davon eine Skizze zu geben, wie ich die gestellte Aufgabe aufgefaßt und behandelt habe, will ich im Vorwort kurz den Inhalt der einzelnen wichtigeren Kapitel durchgehen.

Die Arbeit habe ich in vier Abschnitte eingeteilt:

- I. Die Grundlagen der Potentialtheorie.
- II. Die Integralgleichung Fredholms.
- III. Die Lösung der Randwertaufgaben.
- IV. Die Zusammenhänge zwischen den Lösungen für das Innengebiet und das Außengebiet.

I.

Der erste Abschnitt enthält die allgemeinen Eigenschaften von Potentialen. Die Erfüllung der Differentialgleichung $\Delta = 0$ wird als das wesentlichste Merkmal eines Potentials festgesetzt. Der § 2 bringt eine Definition des Potentials, die sich mir bei meinen potentialtheoretischen Untersuchungen als ausreichend und zweckmäßig erwiesen hat. Die neue Definition des regulären Verhaltens im Unendlichen erzielt für beide Potentialarten, das Logarithmische und das Newtonsche, eine völlige Gleichartigkeit und nimmt dem Unendlichen ganz den exceptionellen Charakter weg. Nach dieser Definition verwende ich nur die Namen Potential oder Potentialfunktion und zwar ganz in der gleichen Bedeutung also für denselben Begriff, während ich andere Benennungen und Unterscheidungen, wie z. B. harmonische Funktion, Fundamentalfunktion usw. gänzlich gemieden habe.

Die Untersuchung hat mich zur Überzeugung geführt, daß für feinere und einigermaßen komplizierte Betrachtungen der Begriff der normalen Ableitungen am Rande, insbesondere wenn dieser nicht sehr regulär ist, schlechterdings nicht zu brauchen sei. Die Existenz und Nichtexistenz der normalen Ableitungen hat ja auch bei den meisten bisherigen Untersuchungen, sobald sie den Sätzen einige Allgemeinheit verschaffen wollten, eine Hauptschwierigkeit heraufbeschworen. Ich definiere daher im § 5 einen Begriff, der einen Ersatz für die normalen Ableitungen am Rande zu geben imstande ist. Der Ersatz findet sich im Integrale $\int \frac{dU}{dn} ds$, welches auf ein Stück der Berandung sich bezieht. Diese Größe läßt sich nun ohne Verwendung der Randwerte der Ableitungen rein durch das Verhalten im Regularitätsgebiete definieren. Ich habe hier diesen Begriff in Anlehnung an physikalische Vorstellungen „Strom“ oder „Strömung“ genannt, finde aber die Benennung nicht sehr glücklich gewählt, da sie doch von einer speziellen Anwendung absehen sollte. Durch Verwendung des neuen Begriffes wird man in die Lage versetzt, den Greenschen Formeln eine Auslegung und Anwendbarkeit unter Umständen zu verschaffen, wo sie ihren gewöhnlichen Sinn ganz verlieren.

Der Satz über die Lage der Extremalwerte eines Potentials wird sowohl für den Logarithmischen als den Newtonschen Fall derart erweitert, daß auch der unendlich ferne Punkt bei Potentialen, die im Unendlichen regulär genannt wurden, gar keine Ausnahme anderen Punkten gegenüber bildet. Der Satz in dieser allgemeinen Fassung erweist sich für die späteren Eindeutigkeitsbeweise als sehr zweckmäßig.

Die fünf Paragraphen 8—12 sind den Potentialen der einfachen Schicht, für welches ich das Zeichen $V(p)$ verwende, und der Doppelschicht, wofür

das Zeichen $W(p)$ gewählt wird, gewidmet. Hier war es vor allem nötig, die klassische Form des Potentials V , nämlich $V(p) = \int \log \frac{1}{r_{ps}} \cdot \mu'(s) ds$, zu verlassen und es in der weit allgemeineren Gestalt des Stieltjesschen Integrals

$$V(p) = \int \log \frac{1}{r_{ps}} \cdot d\mu_s$$

vorauszusetzen, wobei $d\mu_s$ das Element der Masse in einem infinitesimalen Stücke der Berandung im Punkte s vorstellt. Diese allgemeine Form geht in die klassische erst dann über, wenn die Massenverteilung in der Berandung differenzierbar ist, d. h. wenn $\frac{d\mu_s}{ds} = \mu'(s)$ gesetzt werden kann,*)

was aber zur Bildung des Integrales $\int \log \frac{1}{r_{ps}} \cdot d\mu_s$ durchaus nicht nötig ist. Man hat es hierbei mit einer ähnlichen Verallgemeinerung zu tun, wie bei der Erweiterung der differenzierbaren Funktionen auf die stetigen. Die neue Gestalt von $V(p)$ erweist sich, ohne theoretische Erschwerungen nach sich zu ziehen, als weit leistungsfähiger; denn während früher jedes Potential $V(p)$ normale Ableitungen besaß, also solche selbst durchaus stetige Potentiale, die keine bestimmte normale Ableitung besitzen, von vornherein als durch ein $V(p)$ nicht darstellbar erkannt werden konnten, ist es in der neuen Gestalt von einer ähnlichen Allgemeinheit, wie das Potential der Doppelschicht. Unter Zugrundelegung der klassischen Potentialform für $V(p)$ wäre es nicht gelungen, die merkwürdige Darstellung eines Potentials mit gegebenen stetigen Randwerten in der Form eines einfachen Potentials V zu geben, von der im § 40 die Rede ist. Satz S. 94.

Durch die neue Form ist auch formell eine Vereinfachung eingetreten. Man ist jetzt ganz frei von der speziellen Wahl der Größe, die der Messung des Randes zugrunde liegt, so daß in allen Formeln, wo z. B. ein ds steht, darunter nicht notwendig ein Bogenelement verstanden werden muß, sondern überhaupt das Element einer Größe, die zur Festlegung der Randpunkte verwendet werden kann, z. B. beim Kreise etwa der Zentriwinkel. Es steht das Differential ds überall in der Verbindung $\frac{d}{ds}\{\dots\} \cdot ds$, so daß dafür auch $d\{\}$ gesetzt werden könnte, wenn es nicht darauf ankäme, die Veränderlichkeit als vom Punkte s abhängig hervortreten zu lassen.

Die Tendenz, den unbequemen Ableitungen am Rande aus dem Wege zu gehen, — ein Programm, welches schon der K. Neumannsche Unitätsbeweis nahelegt, der von Ableitungen am Rande nichts voraussetzt —, veranlaßte mich zur Einführung des oben erwähnten „Strömungsbegriffes“. Diese Größe ist nun bei den Potentialen V und W , insbesondere beim Logarith-

*) Man erkennt den Grund, weshalb ich die Massendichtigkeit mit einem hinzugefügten Strich z. B. $\mu'(s)$ bezeichne, während $d\mu_s$ das Massenelement selbst ist. Überhaupt habe ich für die Masse die Zeichen m, μ, m zur Verwendung gebracht, so heißt z. B. $m'(s)$ die sogenannte natürliche Massendichtigkeit, während $dm(s)$ das Massenelement bei der natürlichen Massenverteilung bedeutet.

mischen Potential, sehr leicht zu bestimmen. Die große Verallgemeinerung gibt sich wieder darin kund, daß die Strömung beim Potential W unter praktisch wenig einschränkenden Bedingungen stetig verläuft, wobei von der Existenz der normalen Ableitungen noch keine Rede sein kann. Aus den neuen Formeln sind nun die klassischen für die normalen Ableitungen unmittelbar herauszulesen, man wird aber im neuen Verfahren sogar auch die bisher wohl einfachste Herleitungsart für die normalen Ableitungen eines logarithmischen Potentials V von der gewöhnlichen Gestalt vorfinden. § 11.

II.

Der zweite Abschnitt enthält die wichtigsten Sätze aus der Theorie der Fredholmschen Integralgleichung, eines für die moderne Potentialtheorie unentbehrlichen Hilfsmittels. Die Konvergenz der Fredholmschen Reihen allein befreit uns schon für die ganze Betrachtung von jeglicher Konvergenzschwierigkeit und verleiht den Sätzen eine Allgemeinheit, die ihnen sonstige Methoden auf beschwerlichsten Wegen kaum zu verschaffen vermochten. Wenn ich einen kurzen Abschnitt über die Sätze Fredholms eingeschaltet habe, so geschah dies vornehmlich, um alle Hilfsmittel in gedrängter Form bei der Hand zu haben. Auch sind die Beweise der Sätze vielleicht stellenweise von einer etwas einfacheren Form als bei Fredholm.

III.

Der dritte Abschnitt behandelt die Lösung der Randwertprobleme. An die Spitze treten natürlich die Unitätsbeweise. Das K. Neumannsche Verfahren läßt an Strenge und Allgemeinheit keinen Wunsch übrig. Auch bei mehrfach zusammengesetzten Bereichen läßt sich der Unitätssatz noch in einer allgemeineren Form behaupten, wenn es auf konstante Unterschiede am Rande nicht ankommt. Dabei leistet ein im § 7 abgeleiteter Satz über die Extremalwerte vorzügliche Dienste [§ 18].

Der K. Neumannsche Beweis erfordert die Voraussetzung durchwegs stetiger Randwerte und stetigen Anschluß an dieselben aus dem Regularitätsgebiete. Man war aber schon seit langer Zeit imstande, ein überall zwischen endlichen Grenzen bleibendes Potential mit nur in Abteilungen stetigen Randwerten zu konstruieren. In diesem Falle versagt der K. Neumannsche Eindeutigkeitsbeweis, da über die Randwerte in Punkten, wo Sprünge vorhanden sind, nichts ausgesagt werden kann, die Extreme also in solche Stellen gedrängt erscheinen könnten. Beim logarithmischen Potential half man sich mit gewissen Abbildungen in den Kreis (Picard: *Traité d'Analyse*. II 1905, S. 48), ob aber für das Newtonsche Potential auch für diesen Fall ein Eindeutigkeitsbeweis bekannt ist, scheint mir zweifelhaft. Der § 19 bringt nun einen Beweis aller einfachster Natur, der nur von den elementaren Eigenschaften des Potentials Gebrauch macht und ebenso leicht beim Newtonschen Potential geführt werden kann.

Bei der Lösung der Randwertaufgabe wurde die durch einen Parameter λ verallgemeinerte H. Poincarésche Problemstellung zugrunde gelegt, nicht etwa,

weil der Parameter λ wichtige Probleme der Anwendung zusammenfaßt als vielmehr deshalb, weil λ die Rolle eines regulierenden Parameters bei allen Reihenentwicklungen einnimmt und eine Gleichmäßigkeit herbeiführt. Wenn auch eine praktische Wichtigkeit diesem Parameter, sobald er größer als Eins wird, kaum zukommt, so ist es doch sehr wichtig, den Parameter über etwas größere Absolutwerte als Eins hinaus zu betrachten, da z. B. so die gleichmäßige Konvergenz der K. Neumannschen Reihen unmittelbar ersichtlich ist.

Mit den Voraussetzungen über die Gestalt der Begrenzung konnte ich bei dieser Gelegenheit jede Erschwerung vermeiden. Immerhin ist die Form des vorausgesetzten Gebietes eine für die bisherigen Verhältnisse recht allgemeine. Es kann z. B. der Zusammenhang ein ganz beliebiger sein, wenn nur die Normale überall einen stetigen Verlauf hat und eine endliche Krümmung vorhanden ist. Man könnte sich auch in dieser Richtung von mancher Einschränkung befreien; wenn es zur Vereinfachung nicht geschah, so war es deshalb, weil bei unserer Untersuchung diese Fragestellung nicht als die maßgebende erschien. Doch sind die Fundamente so weit ausgebildet, daß einer Verallgemeinerung wenigstens von dieser Seite nichts im Wege steht.

Im § 22 findet sich die Formulierung des Problems und seine Zurückführung auf eine Integralgleichung, ferner der Beweis der Äquivalenz der Integralgleichung mit dem Problem. Jetzt ist der sichere Boden da, der Existenzbeweis und alle weiteren Folgerungen und Fragestellungen lösen sich von selbst aus, während Konvergenzbetrachtungen ganz erspart bleiben.

Die Belegung $v(s)$ eines Potentials W , das die Randwertaufgabe bei gegebener Randfunktion $f(s)$ löst, ergibt sich in der Form

$$v(s) = f(s) - \lambda \int f(\sigma) H(\sigma s) d\sigma,$$

worin $H(\sigma s)$ eine einzig vom Parameter λ und der Form des vorausgesetzten Gebietes abhängige Funktion zweier Punkte σ, s des Randes ist. Die Fredholmsche Lösung gibt $H(\sigma s)$ in expliziter Form als Quotienten zweier ganzer, im allgemeinen transzendenter, Funktionen von λ und es ist also die einzige Vorsicht der Frage zuzuwenden, ob nicht der Nenner von $H(\sigma s)$, eine ganze nur von λ abhängige Funktion $D(\lambda)$, Null wird (Singuläre Parameter).

Im § 24 werden zwei Sätze über die singulären Fälle des Parameters abgeleitet, deren Herleitung gleich einfach als erforderlich ist. Der erste Satz geht auf Poincaré zurück.

Der § 25 bringt die Untersuchung der Parameterwerte $\lambda = \pm 1$, denen gerade die uns vornehmlich interessierenden Fälle der Bestimmung von Potentialen aus gegebenen Werten am Innen- bzw. am Außenrande entsprechen. Dabei zeigt es sich, daß für $\lambda = -1$ die Lösung versagt, weil $H(\sigma s)$ polar unendlich wird. Die Funktion $H(\sigma s)$ gibt uns aber trotzdem auch in diesem Falle alle Hilfsmittel zur Lösung der Randwertaufgabe. Es zeigt sich, daß an der Stelle $\lambda = -1$, wo die Funktion $H(\sigma s)$ die Form

$$H(\sigma s) = \frac{m'(\sigma)}{\lambda + 1} + \mathfrak{H}(\sigma s)$$

hat, das Residuum $m'(\sigma)$ genau die Massendichte (*natürliche Belegung* oder *Leiterbelegung*) eines Potentials der einfachen Schicht $\Gamma(p)$ ist, welches die Gesamtmasse = 1 hat ($\int m'(\sigma) d\sigma = 1$) und konstante Randwerte besitzt (*Leiterpotential*), während die endlich bleibende Funktion $\mathfrak{S}(\sigma s)$ an Stelle des $H(\sigma s)$ in der Belegung $v(s)$ gesetzt, ein Potential W liefert, welches am Rande die gegebenen Werte $f(s)$ nur bis auf einen additiven konstanten Unterschied, die Neumannsche Konstante, darstellt. Mehr kann man aber von einem Potential W nach S. 16 u. S. 40 überhaupt nicht verlangen.

Interessant ist es dabei, wie uns gleichzeitig von selbst ein Ersatz in den Leiterpotentialen geliefert wird, dies insbesondere im Falle mehrfach zusammenhängender Bereiche, wo sich aus dem Residuum genau so viele „natürliche Leiterbelegungen“ und „Leiterpotentiale“ ergeben, als getrennte Randstücke vorhanden sind. Jedes Leiterpotential hat auf jedem einzelnen Randstück je einen konstanten Wert aber jedes nur auf je einem Randstück eine nicht verschwindende Ladung, die = 1 ist. Diese Leiterpotentiale geben uns das Mittel, die Randwertaufgabe auch in dem Falle zu lösen, wenn die Darstellung der Randwerte genau verlangt wird (§ 28) und nicht nur bis auf je einen konstanten Unterschied auf jedem geschlossenen Stück, eine Aufgabe, die schon durch ein und nur ein Potential W , etwa durch die K. Neumannschen Reihen, gelöst wird.

Die Bestimmung der Funktion $\mathfrak{S}(\sigma s)$ ist durch eine Reihe sehr einfach.

Man bildet sich aus der Funktion $\frac{1}{\pi} \frac{d}{dn_\sigma} \log \frac{1}{r_{s\sigma}}$ d. h. aus

$$h(\sigma s) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{d\sigma} \operatorname{arctg} \frac{y_s - y_\sigma}{x_s - x_\sigma}$$

durch sukzessive Anwendung der Neumannschen Operation (S. 59) eine Funktionenfolge

$$h(\sigma s), h_1(\sigma s), h_2(\sigma s), \dots,$$

dann konvergieren diese Funktionen gegen eine von s nicht abhängige in σ stetige Größe $m'(\sigma)$. Dies ist genau die natürliche Belegung [§ 25, 26]. Die Reihe für $\mathfrak{S}(\sigma s)$ lautet dann

$$\mathfrak{S}(\sigma s) = [h(\sigma s) - m'(\sigma)] - \lambda [h_1(\sigma s) - m'(\sigma)] + \lambda^2 [h_2(\sigma s) - m'(\sigma)] - \dots$$

und es kann darin ohne weiteres $\lambda = \pm 1$ eingesetzt werden. Die Herstellung der Neumannschen Reihen liegt auf der Hand.

Wenn auch diese Entwicklungen am konkreten Beispiele des logarithmischen Potentials durchgeführt wurden, so gelten doch genau analog alle Sätze auch für das Newtonsche Potential (§ 29, S. 66).

Der Schlußparagraph dieses Kapitels bildet die Anwendung auf den Kreis und die Ellipse. Die Poissonsche Formel für das Innengebiet und die für das Außengebiet ergeben sich von selbst. Die Betrachtung der Ellipse hat keine Schwierigkeiten. Einfach ist in diesem Falle der Fredholmsche Nenner

$$D(\lambda) = (1 + \lambda)(1 - \lambda^2 q^2)(1 - \lambda^2 q^4)(1 - \lambda^2 q^6) \dots$$

wo aus den Halbachsen A, B die Größe q sich durch $q = \frac{A-B}{A+B}$ ergibt.

IV.

Der letzte Abschnitt ist den Zusammenhängen gewidmet, welche zwischen den Lösungsmethoden der beiden Randwertaufgaben $U(s^+) = f(s)$ und $U(s^-) = f(s)$ bestehen, wobei s^+ der innere, s^- der äußere Randpunkt am Kurvenpunkte s ist. Die Potentiale $U(p)$ lassen sich in der Form (62) S. 78

$$U(p) = \int f(\sigma) \{ \dots \} d\sigma$$

darstellen, worin die Größe $\{ \dots \}$ von der speziellen Form der gegebenen Randwerte $f(\sigma)$ nicht abhängt, also eine rein geometrische Funktion ist, die von zwei Punkten, nämlich einem Randpunkte σ und einem „Aufpunkt“ p abhängig ist. Die Größe $\{ \dots \}$ ergibt sich übrigens einfach aus der obigen Funktion $\mathfrak{H}(\sigma s)$, die nur von zwei Randpunkten abhängt, also noch einfacher ist als $\{ \dots \}$. Die Lösung der Probleme besteht also in der Auffindung der beiden $\{ \dots \}$ -Größen, nämlich für das Innengebiet und das Außengebiet, oder was noch einfacher ist, in der Bestimmung der beiden Randfunktionen $\mathfrak{H}(\sigma s)$, die den Fällen $\lambda = \pm 1$ entsprechen, nämlich $\mathfrak{H}_{+1}(\sigma s)$ und $\mathfrak{H}_{-1}(\sigma s)$. K. Neumann hat sich nun die Frage vorgelegt, ob nicht noch eine weitere Reduktion des Problems möglich sei, ob man also nicht schon mit einer einzigen geeigneten Randfunktion auskommen könnte, um beide Randwertaufgaben in einfacher Weise zu beherrschen.*) Die vorliegende Schrift hat also die Untersuchung dieser K. Neumannschen Fragestellung zum hauptsächlichen Ziel. In der Tat ergibt sich die Bestätigung der Möglichkeit einer Reduktion auf eine einzige Randfunktion in sehr einfacher Weise und findet sich in vorliegender Schrift in verschiedenen Richtungen durchgeführt.

1.

Ein einfacher Zusammenhang ergibt sich folgendermaßen. Wählt man als Ausgangsfunktion einer Neumannschen Funktionenfolge die schon oben erwähnte Funktion

$$h(\sigma s) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{d}{dn_\sigma} \log \frac{1}{r_{\sigma s}} = \frac{1}{\pi} \frac{d}{d\sigma} \operatorname{arctg} \frac{y_\sigma - y_s}{x_\sigma - x_s},$$

*) Es sind im wesentlichen die beiden $\{ \dots \}$ -Größen meiner Formeln (62) S. 78, welche K. Neumann in seiner Arbeit (Sächs. Ber., Math.-Phys. Kl. 1906 S. 483 ff.) mit ζ und η bezeichnet hat. Er verfolgt nun das Ziel, diese beiden lösenden Funktionen in der Weise auf eine einzige zurückzuführen, daß sie beide als Potentiale der einfachen Schicht von ein und derselben materiellen Belegung Δ_s^q [S. 535 Gl. (10)] dargestellt werden. K. Neumann bezeichnet aber seine Ergebnisse als nicht streng und einer weiteren Untersuchung bedürftig. Die beiden Funktionen ζ und η sind von je zwei Punkten, einem Randpunkt σ und einem „Aufpunkt“ p abhängig und wenn der Aufpunkt gegen den Randpunkt σ etwa in normaler Richtung rückt, wachsen die Funktionen ζ und η über jeden Betrag und zwar beim logarithmischen Potential, wie z. B. die Poissonsche Formel zeigt, wie die reziproke Distanz $\frac{1}{r_{p\sigma}}$, beim Newtonschen Potential sogar wie $\frac{1}{r_{p\sigma}^2}$. So ein Verhalten zeigt aber niemals ein Potential der einfachen Schicht. Wie der Verfasser dieser Schrift sich die Idee, ein Potential mit gegebenen Randwerten gleichzeitig für das Innengebiet und das Außengebiet durch ein Potential der einfachen Schicht darzustellen, zu eigen gemacht hat, wird aus den §§ 39, 40, 41 dieser Arbeit klar.