Numerische Mathematik 11, 346—348 (1968)

Ein Kriterium für die Quasi-Optimalität des Ritzschen Verfahrens

J. NITSCHE

Eingegangen am 5. Oktober 1967

1

Betrachtet wird in einem Hilbert-Raum H die lineare Gleichung

$$Ax = f \tag{1}$$

unter den Voraussetzungen an A:

i) $D(A)$ dicht in H;
ii) A positiv definit und selbstadjungiert;
iii) A^{-1} vollstetig.

Mit Hilfe des Operators A lassen sich indizierte Normen

$$\|x\|_k = \sqrt{(x, A^k x)}$$

und zugehörige Hilbert-Räume H_k bilden[1].

Unter Zugrundelegen einer aufsteigenden Folge $\mathfrak{N} = \{\mathfrak{H}_n | n = 1, 2, \ldots\}$ von n-dimensionalen Teilräumen liefert das Ritzsche Verfahren für jedes n eine Näherung $x_n = R_n f \in \mathfrak{H}_n$. Der Fehleroperator $\varepsilon_n = A^{-1} - R_n$ kann als Abbildung von H_0 in H_0 bzw. in H_1 aufgefaßt werden. Mit den Eigenwerten $\{\lambda_k\}$ des Operators A gelten die unteren Abschätzungen

$$\begin{aligned} \|\varepsilon_n\|_0 &\geqq \lambda_{n+1}^{-1} \\ \|\varepsilon_n\|_1 &\geqq \lambda_{n+1}^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{2}$$

und die Schranken werden bei Verwenden der Eigenelemente des Operators A als Ansatzfunktionen angenommen.

Existiert zu einer gegebenen Folge $\mathfrak{N}$ eine Folge von Projektionsoperatoren $\{P_n | P_n\colon H \to \mathfrak{H}_n\}$ mit

$$\|x - P_n x\|_1 \leqq c\, \lambda_{n+1}^{-\frac{1}{2}} \|x\|_2, \tag{3}$$

so ist das Ritz-Verfahren offensichtlich quasi-optimal in bezug auf die 1-Norm (vgl. BABUSKA et al. [1], S. 221 f.). Es ist ja

$$\|x - R_n f\|_1 = \inf_{\xi \in \mathfrak{H}_n} \|\xi - x\|_1 \leqq \|P_n x - x\|_1 \leqq c\, \lambda_{n+1}^{-\frac{1}{2}} \|x\|_2 = c\, \lambda_{n+1}^{-\frac{1}{2}} \|f\| \tag{4}$$

---

[1] Bei Anwendung auf Randwertprobleme sind diese Räume i. allg. auch durch Differenzierbarkeitsbedingungen festgelegt. Im Falle des Dirichlet-Problems in einem Gebiet Ω einer elliptischen Differentialgleichung 2. Ordnung gilt z. B.

$$H = H_0 = W_2(\Omega), \quad H_1 = \mathring{W}_2^1(\Omega), \quad H_2 = \mathring{W}_2^1(\Omega) \cap W_2^2(\Omega).$$

und damit

(5) $$\|\varepsilon_n\|_1 \leqq c\, \lambda_{n+1}^{-\frac{1}{2}}.$$

Wie unten gezeigt wird, ist die Bedingung (3) aber auch hinreichend für die Quasi-Optimalität des Ritz-Verfahrens in bezug auf die 0-Norm. Dieses Ergebnis läßt sich noch anders formulieren. Der Ritz-Operator R_n ist ein linearer Operator. Mit (5) gilt daher auch (3) bei $P_n = R_n$. So ergibt sich der

Satz. Ist das Ritzsche Verfahren quasi-optimal in bezug auf die 1-Norm, so gilt dasselbe in bezug auf die 0-Norm.

2

Die Ritz-Näherung x_n ist als Element von $\mathfrak{H}_n$ durch die Beziehung

(6) $$(\xi, A\, x_n - f) = 0, \qquad \xi \in \mathfrak{H}_n$$

charakterisiert. Nach Einsetzen von $f = A\, x$ kann für (6) mit der Abkürzung $z_n = x_n - x$ auch

$$(\xi, A\, z_n) = 0, \qquad \xi \in \mathfrak{H}_n$$

geschrieben werden.

Mit $\xi = P_n y = y - (y - P_n y)$ wird daraus

$$(y, A\, z_n) = (y - P_n y, A\, z_n).$$

Jetzt werde speziell $y = A^{-1} z_n$ gesetzt:

$$\|z_n\|^2 = \big((I - P_n) A^{-1} z_n, A\, z_n\big).$$

Unter Zuhilfenahme der Voraussetzung (3) ergeben sich schrittweise die Abschätzungen

$$\|z_n\|^2 \leqq \|(I - P_n) A^{-1} z_n\|_1 \|z_n\|_1 \leqq c\, \lambda_{n+1}^{-\frac{1}{2}} \|A^{-1} z_n\|_2 \|z_n\|_1 = c\, \lambda_{n+1}^{-\frac{1}{2}} \|z_n\| \, \|z_n\|_1 .$$

Nach Kürzen des Faktors $\|z_n\|$ und unter Berücksichtigung von $z_n = -(x - R_n f)$ in (4) ergibt sich wie behauptet

$$\|z_n\| \leqq c^2\, \lambda_{n+1}^{-1} \|f\|$$

bzw.

$$\|\varepsilon_n\|_0 \leqq c^2\, \lambda_{n+1}^{-1}.$$

3

B sei ein im Sinne von Michlin [3] zu A ähnlicher Operator, d.h. B erfülle die gleichen Voraussetzungen wie A und es existiere ein $c > 0$ mit

$$c^{-1}(x, A^k x) \leqq (x, B^k x) \leqq c\,(x, A^k x) \qquad k = 1, 2 \quad \text{und} \quad x \in D(A).$$

Dann gilt für die Eigenwerte μ_n von B analog

$$c^{-1} \lambda_n \leqq \mu_n \leqq c\, \lambda_n .$$

Wird für $\mathfrak{H}_n$ der von den n ersten Eigenelementen von B aufgespannte Teilraum gewählt, so ist (3) erfüllt und das Ritz-Verfahren demnach zu der 0- und 1-Norm quasi-optimal. Für die Orthogonal-Projektion P_n gilt nämlich

$$\begin{aligned}\|x - P_n x\|_1^2 &\leqq c\big((x - P_n x), B(x - P_n x)\big) \leqq c\,\mu_{n+1}^{-1}\|B x\|^2 \\ &\leqq c^2 \mu_{n+1}^{-1}\|x\|_2^2 \qquad\qquad \leqq c^3 \lambda_{n+1}^{-1}\|x\|_2^2 .\end{aligned}$$

Die Abschätzungen der vorliegenden Arbeit lassen sich bei dieser Wahl von $\mathfrak{H}_n$ auch aus den Ergebnissen von DZISKARIANI [2] und VAINIKKO [4] entnehmen. Wegen der Aussage in bezug auf die 1-Norm vgl. auch die Ausführungen in BABUSKA et al. [1], S. 226—241.

Literatur

1. BABUSKA, I., M. PRAGER, and E. VITASEK: Numerical processes in differential equations. SNTL-Publishers of Technical Literature, Prague. London-New York-Sydney: Interscience Publishers 1966.
2. DZISKARIANI, A. V.: On the rate of convergence of the Bubnov-Galerkin method. Zh. vych. mat. **4**, No. 2, 343—348 (1964).
3. MICHLIN, S. G.: Zur Ritzschen Methode. Dokl. Akad. Nauk SSSR, **106**, No. 3, 391—394 (1956).
4. VAINIKKO, G.: Certain estimates for the error in the Bubnov-Galerkin method. I. Asymptotic estimates; II. Estimates of the n-th approximation. Tartu Riikl. Ül. Toimetised No. **150**, 188—201 und 202—215 (1964).

Prof. Dr. J. NITSCHE
Institut für Angewandte Mathematik
der Albert-Ludwigs-Universität
7800 Freiburg i. Br., Hebelstr. 40